Још неки неодређени интеграли

Израчунати:

1. $$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \left[\begin{matrix} u=\sqrt{x^2+a^2} & d\vartheta=dx \\ du=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx & \vartheta=x \end{matrix}\right] = x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx+a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|$$

Означимо $I=\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$

Добијамо

$$I=x\sqrt{x^2+a^2}-I+a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|$$

$$2I=x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|$$

$$I=\frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+c=\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$$

2. $$\int \sin^n x\,dx = \left[\begin{matrix} u=\sin^{n-1}x & d\vartheta=\sin x\,dx \\ du=(n-1)\sin^{n-2}x\cos x\,dx, & \vartheta=-\cos x \end{matrix}\right] =$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\cos^2x\,dx=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\,(1-\sin^2x)\,dx$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int\sin^n x\,dx$$

Нека је $I_k=\int\sin^k x\,dx$. Тада је

$$I_n=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

$$nI_n=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}$$

$$I_n=\frac{-\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{(n-1)}{n}I_{n-2}\qquad(*)$$

Дакле, добили смо рекурзивну једначину, тј. I_n добијамо тако што нађемо I_{n-2} и уврстимо у формулу (*), I_{n-2} добијамо помоћу I_{n-4} итд. Морамо наћи и почетне услове за ову једначину, тј I_1 и I_2.

$$I_2=\int \cancel{\cos}\sin^2 x\,dx=\int \frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+c$$

$$I_1=\int \sin x\,dx=-\cos x+c$$

3. $$\int\frac{dx}{\cos^n x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^n x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^n x}dx+\int\frac{dx}{\cos^{n-2}x}$$

Означимо са $I_n=\int\frac{dx}{\cos^n x}$. Добили смо

$$I_n=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^n x}dx+I_{n-2}$$

Нађимо $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^n x}dx$

$$\int\frac{\sin^2 x}{\cos^n x}dx=\left[\begin{array}{ll} u=\sin x & dv=\frac{\sin x}{\cos^n x}dx \\ du=\cos x\,dx & v=\int\frac{\sin x}{\cos^n x}dx=\left[\begin{array}{l}\cos x=t\\ -\sin x\,dx=dt\end{array}\right]= \\ & =-\int\frac{dt}{t^n}=-\int t^{-n}dt=-\frac{t^{-n+1}}{-n+1}= \\ & =\frac{1}{n-1}\frac{1}{(\cos x)^{n-1}}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x}-\frac{1}{n-1}\int\frac{dx}{\cos^{n-2}x}=\frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x}-\frac{1}{n-1}I_{n-2}$$

Дакле, $I_n=\frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x}-\frac{1}{n-1}I_{n-2}+I_{n-2}=$

$$=\frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$$

Овим, добили смо рекурзивну једначину. Нађимо почетне услове

$$I_2=\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+c$$

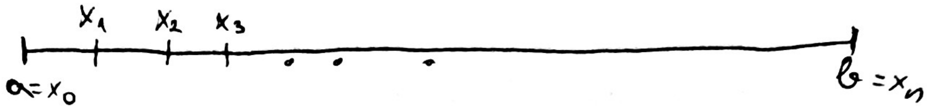
$$I_1=\int\frac{dx}{\cos x}=\left[\begin{array}{ll}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t & \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} & \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right]=\int\frac{\frac{2dt}{\cancel{1+t^2}}}{\frac{1-t^2}{\cancel{1+t^2}}}=2\int\frac{dt}{(1-t)(1+t)}=$$

$$=2\cdot\left(\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1-t}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t}\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\ln|1-t|+\frac{1}{2}\ln|1+t|\right)=\ln|1+t|-\ln|1-t|+c=$$

$$=\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+c\right|$$

Риманов интеграл

Посматрамо функцију f на сегменту $[a,b]$.



T_n - подјела сегмента $[a,b]$

$\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$

$d_i = x_i - x_{i-1}$ - дужина сегмента Δ_i

$d(T_n) = \max\limits_{1\le i\le n} d_i$ - дијаметар подјеле T_n

Изаберимо тачке $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, тако да $\xi_i \in \Delta_i$

$T_{n,\xi}$ - маркирана подјела сегмента $[a,b]$

$P_{[a,b]} = \{T_{n,\xi} \mid T_{n,\xi}$ - маркиране подјеле сегмента $[a,b]\}$

$B_\delta = \{T_{n,\xi} \in P_{[a,b]} \mid d(T_{n,\xi}) < \delta\}$

$B = \{B_\delta \mid \delta \in \mathbb{R}^+\}$

Интегралну суму ф-је f и маркиране подјеле $T_{n,\xi}$ сегмента $[a,b]$ дефинишемо са

$$\sigma(f, T_{n,\xi}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) d_i$$

Дефинишемо функцију

$$\Phi_f : P_{[a,b]} \to \mathbb{R}, \quad \Phi_f(T_\xi) = \sigma(f, T_\xi)$$

Риманов интеграл ф-је f на сегменту $[a,b]$ дефинишемо са:

$$\lim_{d(T_{n,\xi})\to 0} \Phi_f(T_{n,\xi}) = I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Нека је $m_i = \inf\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$

$s(f, T_{n,\xi}) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i d_i$ - доња Дарбуова сума за ф-ју f и подјелу $T_{n,\xi}$

$S(f, T_{n,\xi}) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i d_i$ - горња Дарбуова сума за ф-ју f и подјелу $T_{n,\xi}$

Важи $s(f,T_{n,s}) \le \sigma(f,T_{n,s}) \le S(f,T_{n,s})$

$\lim\limits_{d(T_{n,s})\to 0} s(f,T_{n,s}) = \underline{I}$ – доњи Дарбуов интеграл ф-је f на $[a,b]$

$\lim\limits_{d(T_{n,s})\to 0} S(f,T_{n,s}) = \overline{I}$ – горњи Дарбуов интеграл ф-је f на $[a,b]$

Ако за ф-ју f на сегменту $[a,b]$ постоје $\underline{I}$, $\overline{I}$ и ако важи $\underline{I} = \overline{I}$, тада $\exists \int_a^b f(x)dx = \overline{I} = \underline{I}$

Теорема: (Њутн-Лајбницова формула)

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$ гдје је $F(x)$ примитивна ф-ја ф-је f.

1. По дефиницији Римановог интеграла израчунати

$$\int_0^1 x\,dx$$

$T_n = \left\{\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right\}$ – подјела сегмента

$x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \dots, n$

$\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$

$d_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$

$d = \max\limits_{1\le i\le n} d_i = \frac{1}{n}$, $n\to\infty \Rightarrow d\to 0$

$$\left.\begin{array}{l} m_i = \inf\limits_{x\in\Delta_i} f(x) = \frac{i-1}{n} = f\left(\frac{i-1}{n}\right) \\ M_i = \sup\limits_{x\in\Delta_i} f(x) = \frac{i}{n} = f\left(\frac{i}{n}\right) \end{array}\right\}$$ јер је $f\uparrow$ на $[0,1]$, па је $f\uparrow$ на Δ_i

$$s(f,T_{n,s}) = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i = \frac{0}{n}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} + \dots + \frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}(1+2+\dots+(n-1)) = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{2n}$$

$$S(f,T_{n,s}) = \sum_{i=1}^{n} M_i d_i = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} + \frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n} + \dots + \frac{n}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}(1+2+\dots+n) = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{d\to 0} s(f,T_{n,s}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} = \underline{I} \\ \lim\limits_{d\to 0} S(f,T_{n,s}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} = \overline{I} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{I} = \overline{I} = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

2. $\int_0^1 x^2 dx$

$T_n = \left\{\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right\}$ - подјела сегмента

$x_i = \frac{i}{n}, \ i = 0, \dots, n$

$\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$

$d_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$

$d = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i = \frac{1}{n}, \ n \to \infty \Leftrightarrow d \to 0$

$\left.\begin{array}{l} m_i = \inf\limits_{x \in \Delta_i} f(x) = \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 = f\left(\frac{i-1}{n}\right) \\ M_i = \sup\limits_{x \in \Delta_i} f(x) = \left(\frac{i}{n}\right)^2 = f\left(\frac{i}{n}\right) \end{array}\right\}$ јер је $f \nearrow$ на $[0,1]$, па је $f \nearrow$ на Δ_i

$s(f, T_{n,s}) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i d_i = \frac{0^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2\right) =$

$= \frac{1}{n^{\cancel{3}2}} \cdot \frac{(n-1)\cancel{n}(2n-1)}{6} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$

$S(f, T_{n,s}) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i d_i = \frac{1^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{2^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \dots + n^2\right) =$

$= \frac{1}{n^{\cancel{3}2}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{d \to 0} s(f, T_{n,s}) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = \underline{I} \\ \lim\limits_{d \to 0} S(f, T_{n,s}) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = \overline{I} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{I} = \overline{I} = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

3. $\int_0^1 e^x dx$

$T_n = \left\{\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right\}$ - подјела сегмента

$x_i = \frac{i}{n}, \ i = 0, \dots, n$

$\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$

$d_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$

$d = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i = \frac{1}{n}, \ n \to \infty \Leftrightarrow d \to 0$

$\left.\begin{array}{l} m_i = \inf\limits_{x \in \Delta_i} f(x) = e^{\frac{i-1}{n}} \\ M_i = \sup\limits_{x \in \Delta_i} f(x) = e^{\frac{i}{n}} \end{array}\right\}$ јер је $f \nearrow$ на $[0,1]$, па је $f \nearrow$ на Δ_i

$$s(f,T_{n,s})=\sum_{i=1}^{n} m_i d_i = e^{\frac{0}{n}}\cdot\frac{1}{n}+e^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\dots+e^{\frac{n-1}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\cdot\left(1+e^{\frac{1}{n}}+\dots+e^{\frac{n-1}{n}}\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{1/n}}=\frac{1-e}{n\left(1-e^{\frac{1}{n}}\right)}$$

$$S(f,T_{n,s})=\sum_{i=1}^{n} M_i d_i = e^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}+e^{\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\dots+e^{\frac{n}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}}\left(1+e^{\frac{1}{n}}+\dots+e^{\frac{n-1}{n}}\right)=$$

$$=\frac{e^{\frac{1}{n}}\cdot(1-e)}{n\left(1-e^{\frac{1}{n}}\right)}$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{d\to 0} s(f,T_{n,s})&=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-e)}{n\left(1-e^{\frac{1}{n}}\right)}=(1-e)\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}}=(1-e)(-1)=e-1=\underline{I}\\ \lim_{d\to 0} S(f,T_{n,s})&=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{n\left(1-e^{\frac{1}{n}}\right)}=(1-e)\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\left(1-e^{\frac{1}{n}}\right)}=(1-e)\,e^{0}\cdot(-1)=e-1=\overline{I}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{I}=\overline{I}=e-1\Rightarrow\int_0^1 e^x\,dx=e^{1}-1$$

4. $\displaystyle\int_{-1}^{4}(1+x)\,dx$

$T_n=\{x_0=-1,x_1,\dots,x_n=4\}$ - подјела сегмента $[-1,4]$

$\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$, $d_i=x_i-x_{i-1}$

$\xi_i=\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\in\Delta_i$

$T_{n,s}$ - маркирана подјела сегмента $[-1,4]$

$$\sigma(f,T_{n,s})=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\,\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_{i-1}+\frac{x_i^2-x_{i-1}^2}{2}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-x_{i-1}^2)=\left(\cancel{x_1}-x_0+\cancel{x_2}-\cancel{x_1}+\dots+x_n-\cancel{x_{n-1}}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\cancel{x_1^2}-x_0^2+\cancel{x_2^2}-\cancel{x_1^2}+\dots+x_n^2-\cancel{x_{n-1}^2}\right)=x_n-x_0+\frac{1}{2}\left(x_n^2-x_0^2\right)=$$

$$=4-(-1)+\frac{1}{2}\left(4^2-(-1)^2\right)=5+\frac{15}{2}=\frac{25}{2}=12{,}5$$

$$\lim_{d(T_{n,s})\to 0}\sigma(f,T_{n,s})=\lim_{n\to\infty}12{,}5=12{,}5=\int_{-1}(1+x)\,dx$$

5. Да ли је функција

$$f(x)=\begin{cases} 1, x\in \mathbb{Q}\cap[0,1] \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

интеградилна на $[0,1]$?

T_n - подјела сегмента $[0,1]$

$T_n=\{x_0,\dots,x_n\}$.

$\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$

$d_i=x_i-x_{i-1}$

$m_i=\inf\limits_{x\in\Delta_i} f(x)=0$

$M_i=\sup\limits_{x\in\Delta_i} f(x)=1$

$$s(f,T_{n,s})=\sum_{i=1}^{n} m_i d_i=\sum_{i=1}^{n} 0\cdot(x_i-x_{i-1})=0$$

$$S(f,T_{n,s})=\sum_{i=1}^{n} M_i d_i=\sum_{i=1}^{n} 1\cdot(x_i-x_{i-1})=1$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{d(T_{n,s})\to 0} s(f,T_{n,s}) &= \lim_{d(T_{n,s})\to 0} 0=0=\underline{I} \\ \lim_{d(T_{n,s})\to 0} S(f,T_{n,s}) &= \lim_{d(T_{n,s})\to 0} 1=1=\overline{I} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Како је $\underline{I}\neq\overline{I}$, то f није интеградилна по Риману на $[0,1]$

6. Користити одређене интеграле израчунати

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\dots+\frac{n-1}{n^2}\right)$

$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\dots+\frac{n-1}{n^2}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\quad\frac{i-1}{n}$$

Посматрајмо ф-ју $f(x)=x$ на $[0,1]$.

$T_n=\left\{\frac{0}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{n}{n}\right\}$ - подјела сегмента

$\Delta_i=\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$

$d_i=\frac{1}{n}$, $d=\max\limits_{1\le i\le n} d_i=\frac{1}{n}$, $d\to 0\Rightarrow n\to\infty$.

Узмимо $\xi_i=\frac{i-1}{n}$, $i=1,\dots,n$, $\xi_i\in\Delta_i$

$T_{n,s}$ - маркирана подјела сегмента

$$\sigma(f,T_{n,s})=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)d_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\dots+\frac{n-1}{n^2}$$

Дакле

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\dots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{d\to 0}\sigma(f,T_{n,s})=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\frac{1}{2}$$

д) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}\right)$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}+\frac{1}{\frac{n+2}{n}}+\dots+\frac{1}{\frac{n+n}{n}}\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\dots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}$$

Посматрамо ф-ју $f(x)=\frac{1}{1+x}$ на $[0,1]$

$T_n=\{\frac{0}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{n}{n}\}$ - подјела сегмента $[0,1]$

$\Delta_i=\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$

$d_i=\frac{1}{n}$, $d=\max_{1\le i\le n} d_i=\frac{1}{n}$, $n\to\infty \Leftrightarrow d\to 0$

Узмимо $\xi_i=\frac{i}{n}\in\Delta_i$, $i=1,\dots,n$

$T_{n,s}$ - маркирана подјела сегмента

$$\sigma(f,T_{n,s})=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)d_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}$$

Дакле, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{d\to 0}\sigma(f,T_{n,s})=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln|1+x|\Big|_0^1=\ln 2-\ln 1=\ln 2$

7. Израчунати $\int_0^2 f(x)dx$, ако је

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & 1<x\le 2\end{cases}$$

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(2-x)dx=$$

$$=\int_0^1 x^2dx+2\int_1^2 dx-\int_1^2 xdx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+2x\Big|_1^2-\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}+2\cdot 2-2\cdot 1-$$

$$-\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)=\frac{1}{3}+4-2-\frac{3}{2}=\frac{5}{6}$$

8. $$\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}} = \left[\begin{array}{l} 5-4x = t^2 \\ -4dx = 2t\,dt \\ dx = -\frac{t}{2}\,dt \\ x = \frac{5-t^2}{4} \end{array}\right.$$

x	-1	1
t	3	1

$x=-1 \Rightarrow t^2=9 \Rightarrow t=3 \lor t=-3$

$x=1 \Rightarrow t^2=1 \Rightarrow t=1 \lor t=-1$

Смјена мора бити бијективно пресликавање једног интервала на други, па морамо изабрати један од интервала $[-3,-1]$ или $[1,3]$. Не смијемо бирати $[-3,1]$ и $[-1,3]$

$$= \int_{3}^{1} \frac{\frac{5-t^2}{4}\cdot \frac{-t}{2}\,dt}{\sqrt{t^2}} = -\frac{1}{8}\int_{3}^{1} \frac{t(5-t^2)}{|t|}\,dt = \frac{1}{8}\int_{1}^{3} \frac{\cancel{t}(5-t^2)}{\cancel{t}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{8}\left(5t-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^3 = \frac{1}{8}\left(15-\frac{27}{3}-\left(5-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{8}\left(15-\frac{27}{3}-5+\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3} = \frac{1}{6}$$

9. Очигледно је

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}$$

Покушајмо наћи вриједност овог интеграла на други начин.

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left[\begin{array}{l} x^2 = t \quad x=\sqrt{t} \\ 2x\,dx = dt \\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \end{array}\right.$$

x	-1	1
t	1	1

$$= \int_{1}^{1} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = 0$$, што није тачно

Грешка је што смо, при избору смјене, изабрали пресликавање које не слика интервал $[-1,1]$ бијективно на $[0,1]$!

10. $a \neq 0$

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} x = a\sin t \\ dx = a\cos t\,dt \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & a \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{2} \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt = a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos t\sqrt{a^2}\sqrt{1-\sin^2 t} =$$

$$= a^3|a|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos t\sqrt{\cos^2 t}\,dt = a^3|a|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos t\cos t\,dt =$$

$$= a^3|a|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = a^3|a|\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\sin t\cos t)^2 dt}{4} = \frac{a^3|a|}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt =$$

$$= \frac{a^3|a|}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 4t}{2}\right)dt = \frac{a^3|a|}{8}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4t\,dt\right) =$$

$$= \frac{a^3|a|}{8}\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{a^3|a|}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 0 - \left(\frac{1}{4}\underbrace{\sin 2\pi}_{=0} - \frac{1}{4}\underbrace{\sin 0}_{=0}\right)\right) =$$

$$= \frac{a^3|a|\pi}{16}$$